

- **Autor/es** Ana María Portillo de la Fuente, Sara Rodríguez Jiménez
  
- **Título** «Cálculo del volumen en vasijas vacceas a través de un modelo matemático»
  
- **N.º de *Vacceas Anuario*** 11
  
- **Año** 2018
  
- **Páginas** 91-93
  
- **ISBN** 978-84-09-02538-1
  
- **URL** <https://pintiavaccea.es/download.php?file=261.pdf>



# VACCEA 2017

## ANUARIO



Universidad de Valladolid Facultad de Filosofía y Letras  
Centro de Estudios Vacceos Federico Wattenberg

Núm. 11, octubre 2018

[www.pintiavaccea.es](http://www.pintiavaccea.es)

5 €

### **PINTIA CAMPAÑA XXVIII**

EXCAVACIONES EN LAS RUEDAS

### **BASURAS Y FURTIVOS**

UN DEPÓSITO DE LOS AÑOS OCHENTA  
EN LA NECRÓPOLIS DE LAS RUEDAS

### **II. TINTINNABULA**

CERÁMICA.  
PRODUCCIONES  
SINGULARES

### **EL PERRO Y EL CALDERO**

REFLEXIONES  
SOBRE UN ICONO  
ARÉVACO-VACCEO

### **DESPUÉS DE PINTIA**

EL MONASTERIO DE  
SAN SALVADOR DE PEÑAFIEL

### **9 + 1 ZONAS ARQUEOLÓGICAS EN CASTILLA Y LEÓN**

PINTIA HETERODOXA E IRREDENTA

# PREMIOS VACCEA

## Convocatoria 7.ª edición 2020

En el acto de entrega de la sexta edición de los Premios Vaccea, que tuvo lugar en el Aula Magna Lope de Rueda de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Valladolid, en el mes de octubre de 2018, quedaron convocados los correspondientes a su séptima edición, que tendrá lugar el año 2020. Podrán optar a los mismos, en sus distintas modalidades (véase [www.pintiavaccea.es](http://www.pintiavaccea.es)), cuantas instituciones, públicas o privadas, empresas o particulares se presenten o sean presentados, acompañando la documentación que les justifique como acreedores a los mismos; además se tendrán en cuenta las propuestas del jurado de la mencionada edición.

Quienes deseen optar a los Premios Vaccea habrán de dirigirse al Director del Centro de Estudios Vacceos Federico Wattenberg (Departamento de Prehistoria, Arqueología, Antropología Social y Ciencias y Técnicas Historiográficas, Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Valladolid, plaza del Campus Universitario s/n, 47011 Valladolid).

Esta convocatoria permanecerá abierta hasta el 1 de junio de 2020.



#### EDITA

Centro de Estudios Vacceos Federico Wattenberg  
de la Universidad de Valladolid

#### DIRECTOR

Carlos Sanz Mínguez (C.S.M.)

#### COLABORADORES

Juan Francisco Blanco García (J.F.B.G.)  
Juan Manuel Carrascal Arranz (J.M.C.A.)  
Elvira Rodríguez Gutiérrez (E.R.G.)  
Luis Alfonso Sanz Díez (L.A.S.D.)  
Roberto Sendino Gallego (R.S.G.)  
Belinda García Barba (B.G.B.)

#### ILUSTRACIONES

Centro de Estudios Vacceos Federico Wattenberg  
y autores de los trabajos respectivos, salvo indicación  
expresa

#### DISEÑO

Centro de Estudios Vacceos Federico Wattenberg

#### MAQUETACIÓN

Eva Laguna Escudero-CEVFW

#### PORTADA

Cerámicas torneadas finas anaranjadas, tumba 302  
de la necrópolis de Las Ruedas de *Pintia*

#### REDACCIÓN, ADMINISTRACIÓN Y PUBLICIDAD

Centro de Estudios Vacceos Federico Wattenberg  
y Asociación Cultural *Pintia*

#### IMPRESIÓN

Gráficas Benlis. Valladolid

DEPÓSITO LEGAL: DL VA 523-2017

ISBN: 978-84-09-02538-1





06

pág.

06 **Excavaciones en Pintia.** Campaña XXVIII de excavaciones arqueológicas en *Pintia* (Padilla de Duero/Peñañiel)

10 **Basuras y furtivos.** Un depósito de los años ochenta

20 **Producciones vacceas.** Cerámica. Objetos singulares. II. Tintinabula

28 **Pintia, proyecto docente**

32 **VacceArte 2017. 9.ª edición.**  
Jarros rituales - Canecas rituales

38 **El perro y el caldero.** Reflexiones sobre un icono arévaco-vacceo

48 **Útiles y adornos vacceos fabricados en materias óseas**

58 **Una broca de bronce para taladro.** Necrópolis prerromana de *Dessobriga* (Osorno, Palencia)

64 **Después de Pintia.** El monasterio de San Salvador de Peñañiel

76 **9 + 1 Zonas Arqueológicas en Castilla y León.** Pintia heterodoxa e irredenta

82 **Mondar cantos rodados.** El paleolítico termina *circa* 1950

88 **La otra mirada**

90 **Noticiero vacceo**

98 **Humor Sansón**



10



38



20



48



82



32

**PROYECTO PINTIA**  
**Equipo de investigación 2017**

**Director**

Carlos Sanz Mínguez, profesor titular de Prehistoria, Universidad de Valladolid

**Coordinadora**

María Luisa García Mínguez, presidenta de la Asociación Cultural Pintia

**Diseño de las exposiciones**

Ignacio Represa Bermejo

**Personal contratado**

Eva Laguna Escudero  
Lydia Pérez Ruiz  
Ángela Sanz García

**Colaboradores**

M.ª Mercedes Barbosa Cachorro  
Juan Francisco Pastor Vázquez  
Félix Jesús de Paz Fernández  
Carmelo Prieto Colorado  
Joaquín Adiego Rodríguez  
José Carlos Coria Noguera  
Luis Pascual Repiso  
Asociación Cultural Pintia  
Voluntariado pintiano

**Alumnos participantes en la campaña de excavación XXVIII**

Lucian Aurelian Soare	Jaron Davidson	Nicole Rossiter
Sarah Bell	Guillermo García Alcalá	Estrella Sanz Pargas
Owen Brandy	Zach Goldstein	Kristen Squires
Jason Cellars	Joshua Ramsey	

# CÁLCULO DEL VOLUMEN EN VASIJAS VACCEAS A TRAVÉS DE UN MODELO MATEMÁTICO

El uso de sistemas métricos estandarizados se inició con las antiguas civilizaciones por la necesidad de medir de forma comparable y permitir, entre otras cosas, la expansión del comercio, por ejemplo reconociendo una unidad de volumen para la venta de vino o aceite. Se cree que las primeras unidades en la zona del mar Egeo fueron tomadas de Egipto, aunque fueron variando según las ciudades, hasta la reforma del sistema griego de Solón, en el año 594 a.C., en la que se fijaron los patrones de Egina para el volumen (Pellicer, 1997). Dentro de las unidades de capacidad en el sistema griego destacamos la *cótila*, que corresponde a 0,283 litros y que era utilizada tanto para áridos como para líquidos. Puede considerarse la *cótila* como ración individual de consumo y sus múltiplos otras unidades normalizadas, como por ejemplo sextario (2 *cótilas*), quénice (4 *cótilas*), *hemichoos* (6 *cótilas*), *khous* y *xous* (12 *cótilas*), *hemiecton* (16 *cótilas*), *hekteis* (32 *cótilas*), ánfora (72 *cótilas*), metreta (144 *cótilas*) y *mediano* (192 *cótilas*).

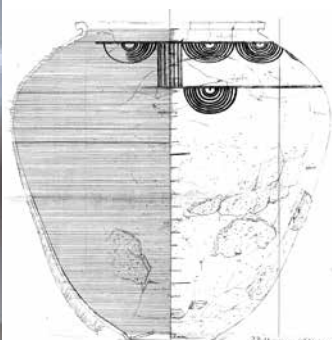


Reconstrucción de un ágape con el ajuar doméstico procedente de la estancia del banquete. Dibujo: Luis Pascual Repiso-CEVFW.

Hay muy pocos trabajos dedicados al estudio de las unidades de volumen en la península Ibérica antes de la romanización, pero de ellos parece deducirse que en el desarrollo de la cultura ibérica tuvieron mucha influencia los modelos de origen griego. En este artículo abordamos un par de cuestiones; por una parte, nos preguntamos si existen medidas estandarizadas de capacidad en las civilizaciones prerromanas y por otra tratamos de investigar la precisión de la estimación del volumen de un recipiente torneado, hallado en un yacimiento arqueológico, a partir de su sección.

Nos centraremos en el estudio de la cerámica del yacimiento vacceo de *Pintia*, de Padilla de Duero, situada a cuatro kilómetros de Peñafiel. Prestaremos especial atención a los materiales encontrados en 2003 dentro de la llamada *estancia del*

*Dolium* de la estancia del banquete.



*banquete*, de la casa 4 del nivel sertoriano que corresponde al primer tercio del siglo I a.C. En concreto nos interesa estimar el volumen de un *dolium* de gran dimensión, cuya manipulación es complicada y comporta un riesgo para la pieza.

La forma física de calcular el volumen de aquellas piezas que lo permiten es rellenar el recipiente con agua o, si la pieza es porosa o frágil, con semillas y después trasvasar el contenido a una probeta graduada. Sin embargo, calcular de esta manera la capacidad de los recipientes recuperados de las excavaciones tiene varias dificultades; por ejemplo, no siempre es posible completar el puzle a partir de las piezas rescatadas o las vasijas son demasiado grandes o delicadas o no están disponibles para ser manipuladas con la técnica del rellenado, por lo cual sería deseable disponer de un método para estimar la capacidad de aquellas piezas para las que no es posible comprobar su volumen de forma material. Aprovecharemos el hecho de que, como parte del estudio de las piezas encontradas en las excavaciones, se realiza de forma sistemática el dibujo de una sección del recipiente a escala. En el caso de las piezas hechas a torno, o en lenguaje matemático, figuras de revolución que se generan girando una curva plana alrededor de un eje, conocer la sección de la pieza es suficiente para calcular su volumen o al menos aproximarlos con bastante precisión.

La forma general de obtener el volumen de un conjunto acotado de tres dimensiones es calcular la integral triple sobre dicho conjunto de la función uno. Esta integral triple se reduce a una integral de una dimensión cuando se conoce el área de las secciones del conjunto sobre uno de los ejes, aplicando el principio de Cavalieri, que es un caso particular del Teorema de Fubini. Esto es aplicable en el asunto que nos ocupa, dado que en los cuerpos de revolución las secciones son círculos y, por tanto, tienen área conocida en función del radio, que en general es variable con la altura. De este modo, el volumen de un cuerpo de revolución alrededor del eje z, con radio  $r(z)$  entre las alturas a y b viene dado por

$$\iiint_{V_{ab}} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \pi r(z)^2 \, dz.$$

Conociendo entonces el radio en función de la altura evaluaríamos la integral, calculando la primitiva del radio al cuadrado y aplicando la regla de Barrow. El problema es que a partir del dibujo de la sección de la pieza no tenemos la expresión analítica de la función del radio y, por tanto, no podemos calcular la primitiva correspondiente. En este caso, podemos recurrir a una fórmula de cuadratura numérica utilizando una tabla de valores de la función que obtendremos midiendo los radios de la vasija a distintas alturas y calculando después una combinación lineal de estos valores.

En Calvo (2007) se calculan aproximaciones al volumen de vasijas a partir del dibujo de su perfil con un procedimiento como el que hemos explicado, dividiendo el volumen en una suma de cilindros. Aunque el artículo no lo dice explícitamente, esto es similar a utilizar la regla del rectángulo compuesta, que tiene orden de convergencia uno. Nosotras, sin embargo, en este trabajo hemos usado la regla del trapecio compuesta y la regla de Simpson compuesta con espaciado fijo (Portillo y De Uña, 2005), cuya convergencia para funciones suficientemente regulares es cuadrática y cuártica respectivamente. Si llamamos  $h$  al espaciado de la partición, es decir,  $h=(b-a)/N$ , a los nodos equiespaciados  $z_i = a + ih, i = 0, \dots, N$ , al radio en esos nodos  $r(z_i) = r_i$  y  $r_{i-1/2}$  al radio en  $z_i - \frac{h}{2}$  los puntos medios de los subintervalos, las reglas compuestas del rectángulo, trapecio y Simpson tienen respectivamente las siguientes expresiones:



$$I_R^C(\pi r(z)^2, [a, b]) = \pi h \sum_{i=0}^{N-1} r_i^2,$$

$$I_T^C(\pi r(z)^2, [a, b]) = \pi h \left( \frac{r_0^2 + r_N^2}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} r_i^2 \right),$$

$$I_S^C(\pi r(z)^2, [a, b]) = \pi \frac{h}{6} \left( r_0^2 + r_N^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} r_i^2 + 4 \sum_{i=1}^N r_{i-1/2}^2 \right)$$

Cuando el tamaño  $h$  del espaciado con el que se miden los radios tiende hacia cero, los errores de cuadratura también tienden a cero, pero además cuanto mayor es el orden de convergencia más rápidamente convergen a cero los errores. Así, por ejemplo, para orden uno, si el espaciado se divide a la mitad el error se divide entre dos, para orden dos si el espaciado se divide a la mitad el error se divide entre cuatro, para orden cuatro cuando el espaciado se divide entre dos el error se divide entre dieciséis (Sanz-Serna, 1998).

Tomamos medidas sobre la sección de la pieza a escala  $\frac{1}{2}$  que nos proporcionó Carlos Sanz Mínguez, director del Centro de Estudios Vacceos Federico Wattenberg, a intervalos de 1 milímetro casi hasta el borde de la vasija. Teniendo en cuenta que en la regla del trapecio compuesta se usan los extremos de los subintervalos en los que se divide el intervalo de integración, mientras que en la regla de Simpson compuesta también se utilizan los puntos medios de los subintervalos, si el número de nodos de la partición es impar con los mismos datos se pueden aplicar ambas reglas (considerando espaciado  $h$  para el trapecio y  $2h$  para Simpson).

En esta tabla se muestran distintas aproximaciones al volumen del *dolium* considerando que la vasija esté llena casi hasta el borde, correspondiente a 46,8 centímetros de altura. Parece que los cálculos se estabilizan en 57,67 litros.

h (cm) escala 1/2	Regla trapecio compuesta	Regla Simpson compuesta
0,8	57,4411	57,4934
0,4	57,4803	
0,2	57,6955	57,6704
0,1	57,6767	

Para validar el método proponemos comparar el volumen medido con el método físico de llenado con semillas y probeta graduada ( $V_S$ ) y el volumen calculado con los métodos de integración numérica ( $V_{IN}$ ) descritos previamente, para un grupo de recipientes en estado relativamente bueno: la copa y la jarra de la *estancia del banquete* y otras seis copas de la necrópolis de Las Ruedas. Precisamente, en la imagen de la izquierda se refleja la medida con semillas de la capacidad de la jarra del *banquete*.



Probeta con las semillas correspondientes al llenado de la jarra de la *estancia del banquete*.

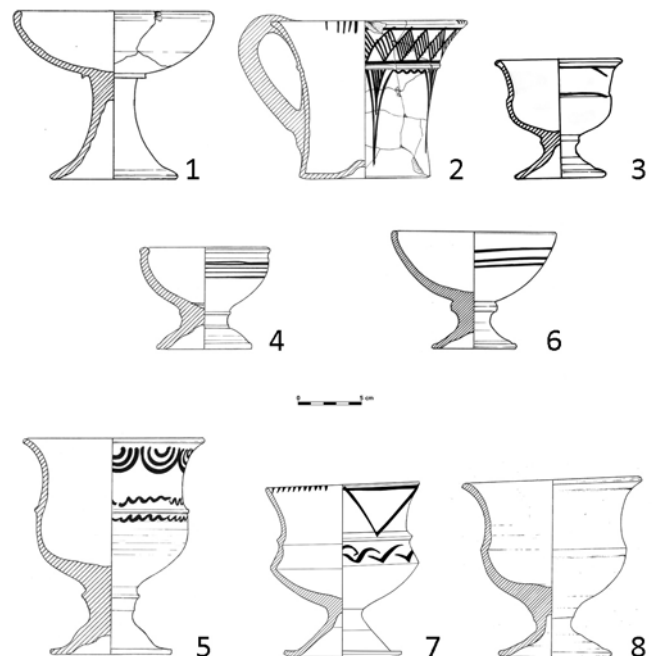
En la siguiente tabla se muestran las distintas piezas, junto con su volumen ( $V_S$ ), su volumen ( $V_{IN}$ ) y el error relativo  $|V_S - V_{IN}| / V_{IN}$  para así poder comparar errores de distintos recipientes.

Como se puede ver, la pieza LR128\_K es la que obtiene la peor aproximación con un error relativo del 45%. En la foto cenital de dicha pieza se observa claramente la deformación de la copa, especialmente en el cuarto superior derecho. Probablemente la sección de esta pieza se ha hecho desde algún ángulo de esa zona con un radio menor, por lo cual el volumen calculado con la sección queda por debajo del volumen medido físicamente con semillas.



Vista cenital de la copa LR128\_K inscrita en un círculo.

Pieza	Identificación	(ml)	(ml)	-   /
1	Copa <i>banquete</i>	500	523	0,04
2	Jarra <i>banquete</i>	950	895	0,06
3	LR98_D	480	510	0,06
4	LR127a_D	175	181	0,04
5	LR127b_AA	640	777	0,17
6	LR128	500	345	0,45
7	LR145_O	480	510	0,06
8	LR172_D	735	661	0,11



Si llamamos  $V$  al volumen real de la pieza,  $V_{SR}$  al volumen calculado con la sección real y  $V_{SD}$  al volumen calculado con la sección dibujada, podemos considerar la siguiente acotación  $|V - V_{IN}| \leq |V - V_S| + |V_S - V_{SR}| + |V_{SR} - V_{SD}| + |V_{SD} - V_{IN}|$

De esta manera desglosamos el error total en cuatro tipos de errores. Por una parte,  $|V - V_S|$  correspondería al error al medir con semillas y probeta, por otra parte,  $|V_S - V_{SR}|$

englobaría los errores debidos a que la pieza es artesana y la manipulación del alfarero puede hacer que la pieza no sea de revolución perfecta, junto con las posibles deformaciones a causa de haber estado enterrada durante dos mil años o más. Cuando el dibujante toma la pieza artesana y dibuja su sección, si la pieza no es muy irregular el principal error será el que cometa con el conjunto discreto de medidas que tome; pero si además la pieza está bastante deformada, dependiendo del ángulo que considere para hacer la sección, puede haber bastante diferencia entre una sección y otra. Estos errores asociados al dibujo de la sección son los que denotaremos como  $|V_{SR} - V_{SD}|$ . Por último, cuando se pretende calcular el volumen de la pieza mediante el método de integración numérica descrito, usando la sección de la que se dispone, se pueden cometer errores al medir los radios y los errores de la propia fórmula de cuadratura, lo corresponde a  $|V_{SD} - V_{IN}|$ .



Sección de una copa industrial.

Por último, hemos considerado un experimento en el que se calcula el volumen de una copa industrial. En este caso hemos eliminado el error de medir con semillas porque llenamos de agua la copa hasta el borde y usamos un peso digital con tara, obteniendo de esta forma una capacidad de 525 ml. Como es una pieza industrial, los errores debidos a deformaciones son despreciables. Calculamos el volumen con las fórmulas de integración numérica, resultando ser de 494 ml, lo que nos da un error relativo de 0.06. De los cuatro tipos de errores considerados, el primero y el último son despreciables frente a los otros dos relaciona-

dos con la deformación y el dibujo de la pieza.

Volviendo al problema inicial de aproximar el volumen de la *dolium* de la *estancia del banquete*, considerando un error relativo del 6%, estimamos que su capacidad oscilaría entre 54 y 61 litros.

Como conclusión del estudio realizado podemos decir que, al menos para los recipientes de tamaño pequeño, no parece que haya una medida estandarizada de capacidad. Quizá el volumen de la *dolium* podría corresponder a un *mediano*.

En cuanto a la cuestión de si podemos calcular el volumen de una pieza arqueológica cuya única información es la sección acompañada de la escala, obtenida directamente de una publicación o de otros medios sin más datos, nos parece conveniente alertar sobre la validez de las capacidades obtenidas.

Después del estudio realizado resulta oportuno comentar algunos artículos dedicados a esta cuestión. Por ejemplo, en Alegre y Calvo (2002) se explica que se desarrolla un método para calcular el volumen de cualquier vasija a partir de su perfil, basado en un método que es equiparable a la regla del rectángulo compuesta, y se valida con recipientes actuales que, como ya hemos visto, es insuficiente; además, en ningún momento se habla de los errores cometidos. En Sopena (2006) y en Sánchez y Cerdeño (2014) se calcula el volumen de cerámica arqueológica a través de programas informáticos 3D. Se toman medidas de los radios a distintas alturas, se reconstruye una sección y girándola 360° se consigue un sólido de revolución. Es indudable que con estos programas se gana en visualización tridimensional de las piezas pero, como

hemos puesto de manifiesto, las cerámicas arqueológicas no son cuerpos de revolución perfectos sino que pueden tener deformaciones. Así, el sólido de revolución obtenido con esa técnica depende del ángulo que se elija para hacer la sección, y por tanto, el volumen calculado de la vasija arqueológica puede tener un error de consideración. Sorprende que en este tipo de publicaciones no se apunte nada acerca de los posibles errores cometidos.

Resumiendo: aunque el método del uso de la sección para calcular el volumen es aceptable si la pieza es regular, es necesario ser cautos porque, como hemos visto en el caso de la copa LR128\_K, puede ocurrir que el error de la aproximación obtenida sea demasiado grande. Es necesario conocer la regularidad de la pieza para asegurarse de que el error de la estimación propuesta es aceptable.

## Bibliografía

- ALEGRE, E. y CALVO, J.C. (2002): Métodos matemáticos aplicados al estudio de los materiales cerámicos de Segeda. *Bolskan*, 19, pp. 221-226.
- CALVO GARCÍA, J.C. (2007): Sistemas metrológicos prerromanos en la península Ibérica. *STVDIVM. Revista de Humanidades*, 12, pp. 35-55.
- PELLICER I BRU, J. (1997): Repertorio paramétrico-metrológico antiguo. Barcelona/Madrid, Asociación Numismática Española.
- PORTILLO DE LA FUENTE, A. y DE UÑA MARTÍN, A. (2005): Prácticas de Cálculo Numérico con Matlab para Ingeniería Técnica. Ejercicios y Aplicaciones. Universidad de Valladolid.
- SÁNCHEZ CLIMENT, A. y CERDEÑO SERRANO, M.L. (2014): Propuesta metodológica para el estudio volumétrico de cerámica arqueológica a través de programas free-software de edición 3D: el caso de las necrópolis celtibéricas del área meseteña. *Virtual Archaeology Review*, vol 5, 11, pp. 20-32.
- SANZ MÍNGUEZ, C. y ROMERO CARNICERO, F. (2009): El vino y el banquete en la Europa prerromana. *Vaccea monografías*, 2. Valladolid.
- SANZ MÍNGUEZ, C. y CARRASCAL ARRANZ, J.M. (2011): 'La cerámica vaccea'. *Anuario Vaccea 2011*. Valladolid: Universidad de Valladolid, Centro de Estudios Vacceos Federico Wattenberg.
- SANZ MÍNGUEZ, C. (2017): Jarros rituales. *Canecas rituais. Vaccea otra mirada*, 11. Valladolid.
- SANZ-SERNA, J.M. (1998): Diez lecciones de Cálculo Numérico. Universidad de Valladolid.
- SOPENA VICIÉN, M.C. (2006): La investigación arqueológica a partir del dibujo informatizado de cerámica. *SALDVIE*, 6, pp. 13-27.

Ana María Portillo de la Fuente  
Sara Rodríguez Jiménez

Agradecemos a Carlos Sanz Mínguez, director del CEVFW de la Universidad de Valladolid, su colaboración en todo momento, enseñándonos el Centro de Estudios Vacceos, proporcionándonos las secciones de las piezas y sus volúmenes medidos en semillas, así como sus valiosas explicaciones y aportaciones. También queremos reconocer la labor del dibujante Luis Pascual por acceder generosamente a trazar la sección de la copa industrial.



# Descubre las **COLECCIONES** de la **Universidad de Valladolid**

Edificio Facultad Medicina  
Ciencias Biomédicas



## Historia y Arte

Plaza de Santa Cruz, 6  
Edificio Rector Tejerina  
(frente al palacio de Santa Cruz)  
☎ 983 423 240  
Lunes a viernes:  
de 10 a 14 y de 18 a 21 h.  
muva@uva.es

Palacio de  
Santa Cruz

Universidad

Edificio Rector Tejerina  
MUVa



## Ciencias Naturales

Plaza de España, 7  
Edificio García Quintana  
☎ 983 211 609  
Martes a viernes,  
de 10 a 14 y de 16 a 18 h.  
Sábados, de 11 a 13 h.  
museo.ciencias.naturales@uva.es

Edificio García Quintana  
Ciencias Naturales



## Ciencias Biomédicas

c/ Ramón y Cajal, 7  
Facultad de Medicina  
☎ 983 423 023  
Lunes a viernes:  
de 10 a 14 y de 16 a 18 h.  
juanpas@med.uva.es

**MUVa**

Museo  
Universidad de Valladolid



Universidad de Valladolid